Cours 1 : Dipôle RC

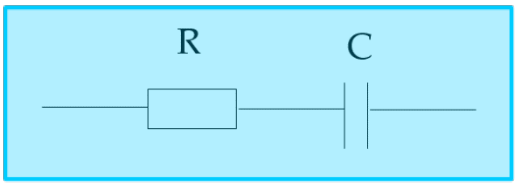
Prof : ARYANI Ahmed

Plan du cours

I- Définition :

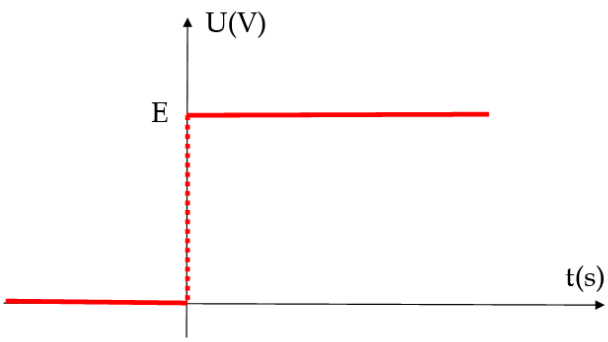
1- Dipôle RC :

Le dipôle RC est une association en série d'un condensateur et d'un conducteur ohmique.



2- Echelon de tension :

Le passage instantané d'une tension de la valeur 0 à une valeur constante non nulle.

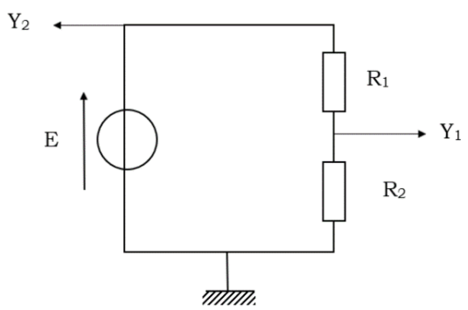


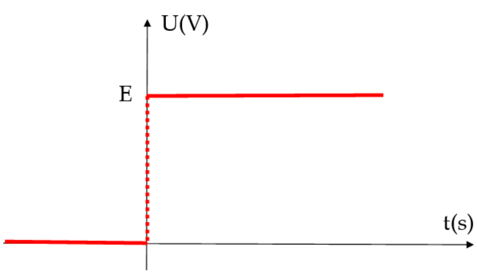
II- Etude expérimentale :

1- Différence entre un dipôle résistor et un condensateur

a- Expérience 1 (Tension aux bornes du résistor):

On réalise l'acquisition de la tension U_{R2} aux bornes du résistor R_2, on obtient sur l'écran de l'oscilloscope le chronogramme suivant



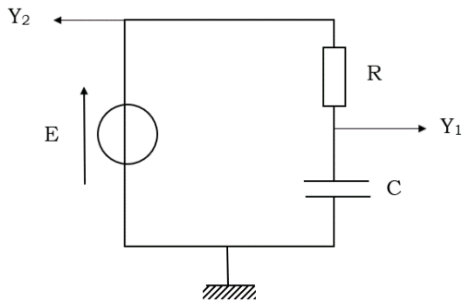


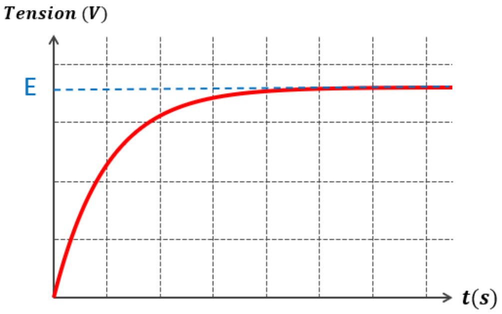
b- Observation :

La tension aux bornes du résistor R_2 passe instantanément de 0 vers une valeur constante égale à E

c- Expérience 2 (Tension aux bornes du condensateur):

On réalise l'acquisition de la tension u_C aux bornes du condensateur, on obtient sur l'écran de l'oscilloscope le chronogramme suivant





d- Observation :

La tension u_c augmente progressivement et après un retard temporel elle atteint sa valeur maximale qui est égale à **E**

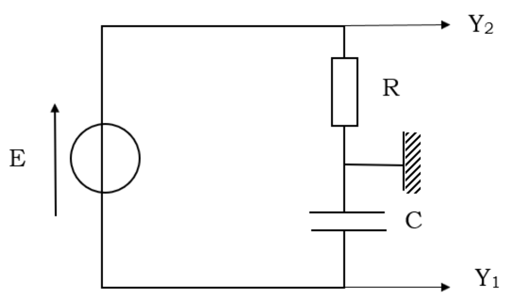
2- Conclusion :

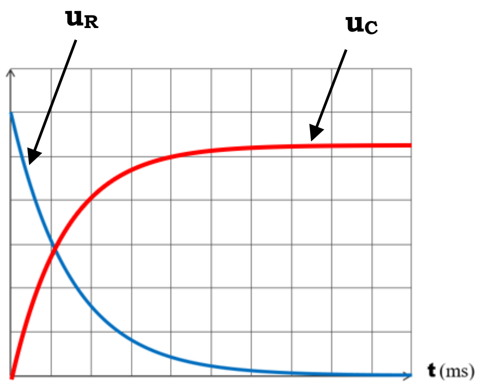
Le condensateur n'a pas les mêmes caractéristiques qu'un conducteur ohmique

La présence du condensateur dans le circuit a créé ce retard temporel Δt

3- Evolution de l'intensité aux cours de la charge :

a- Expérience :

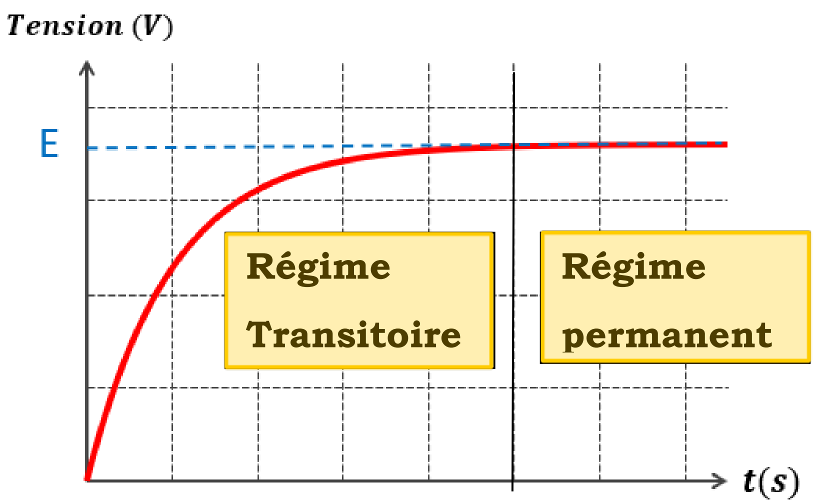




On remarque que lorsque la tension u_c atteint sa valeur maximale, la tension aux bornes du résistor u_R atteint sa valeur nulle. Par conséquent, l'intensité s'annule à la fin de la charge (Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

La courbe de uc(t) comporte deux régimes :

- **Un régime transitoire**
- **Un régime permanent**



b- Conclusion :

La réponse d'un dipôle RC est la charge progressive du condensateur

III- Etude théorique :

1- Equations différentielles :

*En mathématiques, une **équation différentielle** est une équation dont la ou les inconnues sont des fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.*

a- Equation différentielle régissant les variations de $u_c(t)$

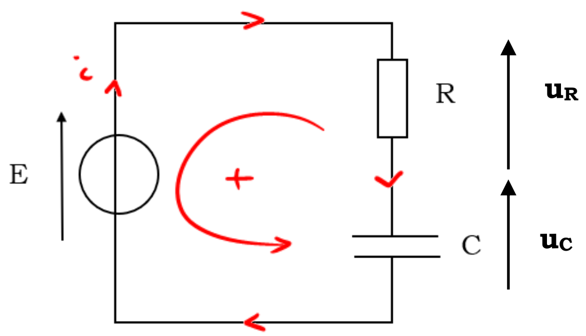
Loi des mailles :

$u_c + u_R - E = 0$

$Ri + u_c = E$

$or\ i = \frac{dq}{dt} \quad et\ q = C\ u_c$

$alors\ i = C\ \frac{du_c}{dt}$



Ce qui donne :

$$RC\ \frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

$$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}\ u_c = \frac{E}{RC}}$$

C'est l'équation différentielle en $u_c(t)$

b- Equation différentielle régissant les variations de q(t)

On a :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC} \quad or \quad u_c = \frac{q}{C}$$

alors

$$\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}\frac{q}{C} = \frac{E}{RC}$$ ce qui donne $$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}}$$

c- Equation différentielle régissant les variations de u_R(t)

Loi des mailles :

$u_c + u_R - E = 0$

$u_R + u_c = E$; On dérive cette équation :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0 \quad \text{or } i = C\frac{du_c}{dt} \quad donc \quad \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}$$

Ce qui donne :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$ alors $$\boxed{\frac{du_R}{dt} + \frac{u_R}{RC} = 0}$$

C'est l'équation différentielle en u_R(t)

d- Equation différentielle régissant les variations de i(t) :

On a : $\frac{du_R}{dt} + \frac{u_R}{RC} = 0$ or $u_R = R\,i$

alors :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0}$$

C'est l'équation différentielle en i(t)

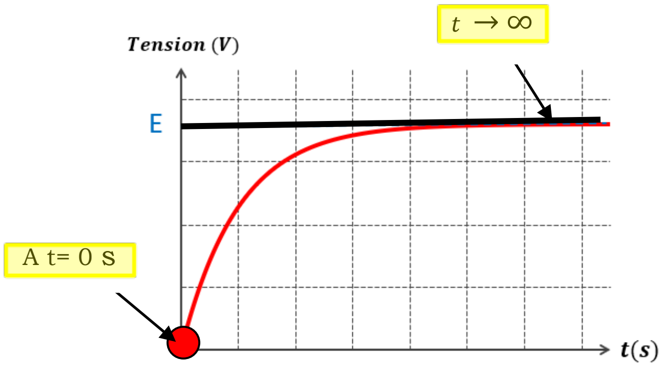
2- Solutions des équations différentielles :

a- Solution de l'équation différentielle régissant les variations de u_c(t)

La solution de l'équation différentielle en u_c(t) s'écrit :

$$\boxed{u_C(t) = A + B\,e^{-\alpha t}}$$

Détermination de A et B à partir des conditions aux limites :



A t= 0 s

uc(t=0) = 0 V

On remplace t = 0 s dans la forme générale de la solution on obtient :

uc(t=0) = A + B

D'où A +B = 0 $\boxed{A = -B}$

En régime permanent (t → ∞)

uc(t→ ∞) = E

uc(t→ ∞) = A + B $e^{-\infty}$ = A car $e^{-\infty} \rightarrow 0$ d'où $\boxed{A = E}$ et $\boxed{B = -E}$

Détermination de α:

On a :

$u_C(t) = A + B\,e^{-\alpha t} = E - E\,e^{-\alpha t}$; on remplace cette solution dans l'équation différentielle

$$-\alpha E e^{-\alpha t} + \frac{1}{RC}(E - Ee^{-\alpha t}) = \frac{E}{RC}$$

$-\alpha E e^{-\alpha t} + \frac{E}{RC} - \frac{Ee^{-\alpha t}}{RC} = \frac{E}{RC}$ ce qui donne : $\alpha E e^{-\alpha t} = \frac{Ee^{-\alpha t}}{RC}$

alors $\boxed{\alpha = \frac{1}{RC}}$ soit $\boxed{\tau = RC}$

D'où la solution de l'équation différentielle en uc(t) s'écrit :

$$\boxed{u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

b- Solution de l'équation différentielle régissant les variations de q(t)

On a : q(t) C $u_C(t)$ or $u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Ce qui donne :

$$\boxed{q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = Q_{max}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

c- Solution de l'équation différentielle régissant les variations de $u_R(t)$

On peut déduire cette équation à partir de la loi des mailles :

On a :

$$u_c + u_R - E = 0 \qquad \text{alors} \qquad u_R = E - u_c$$

$$u_R = E - E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = E - E + Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

D'où : $\boxed{u_R(t) = E\ e^{-\frac{t}{\tau}}}$

a- Solution de l'équation différentielle régissant les variations de i(t)

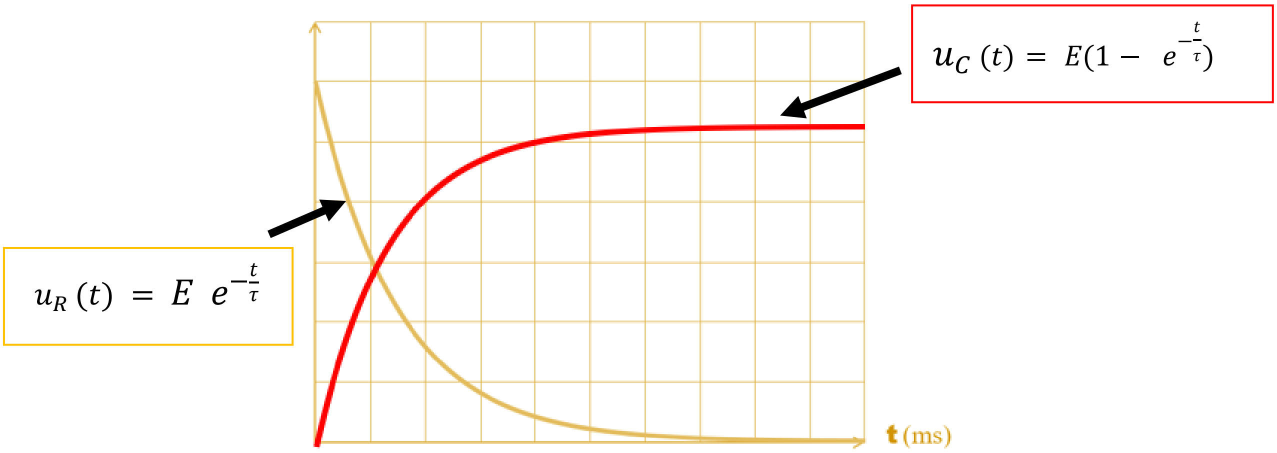
On peut déduire cette équation à partir de la loi d'ohm :

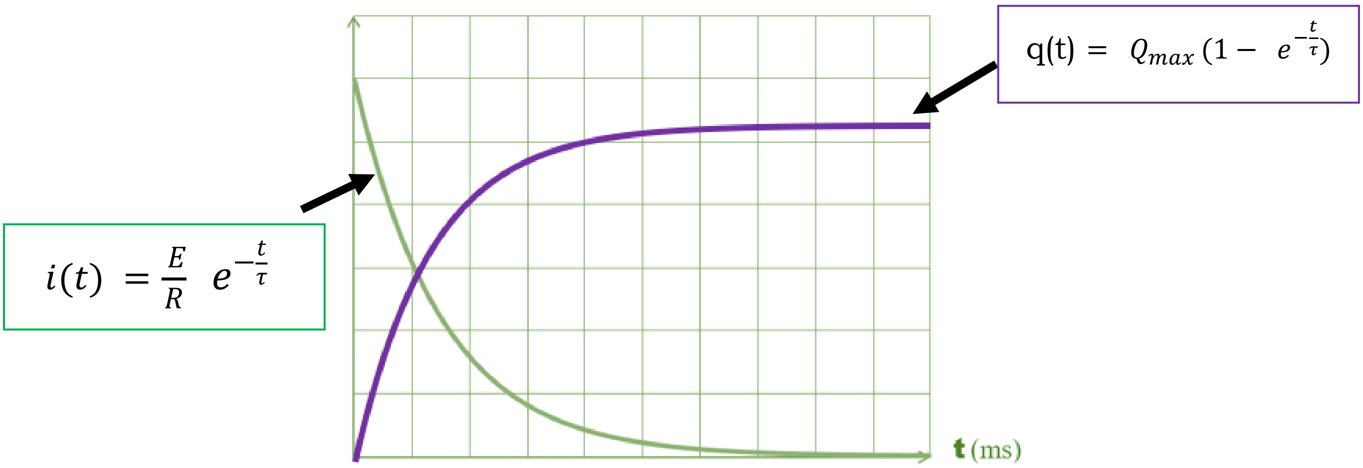
On a :

$$u_R(t) = E\ e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad or \qquad u_R = R\,i$$

alors : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\ e^{-\frac{t}{\tau}}}$

3- Représentations graphiques :





IV- Constante du temps :

1- **Définition**

La constante du temps τ est une grandeur caractéristique du dipôle RC, elle nous renseigne sur la rapidité avec laquelle s'effectue la charge et la décharge ou la décharge d'un condensateur

Unité :

$[\tau] = [R][C] \quad [\tau] = \frac{[U]}{[I]} . \frac{[q]}{[U]}$ alors $\boxed{[\tau] = \frac{[q]}{[I]} = [T]}$

Par conséquent : la constante du temps est homogène à un temps ; elle s'exprime en seconde

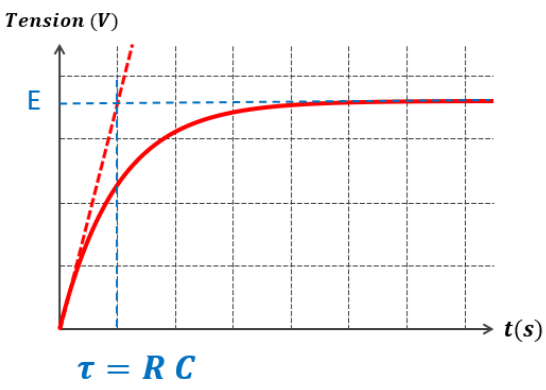
2- **Détermination de la constante du temps :**

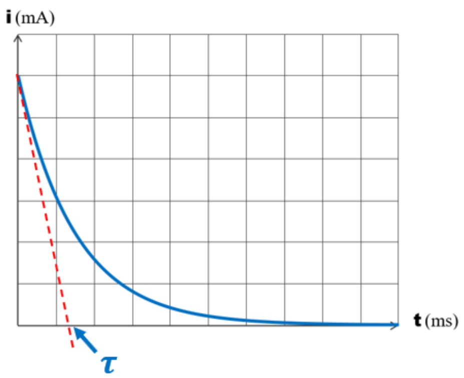
a- Par le calcul :

$$\boxed{\tau = R\,C}$$

b- Graphiquement :

- Méthode de la tangente :





- Méthode du pourcentage :

On cherche l'ordonnée pour $\boxed{t = \tau}$

On a : $u_C\,(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Pour $t = \tau$

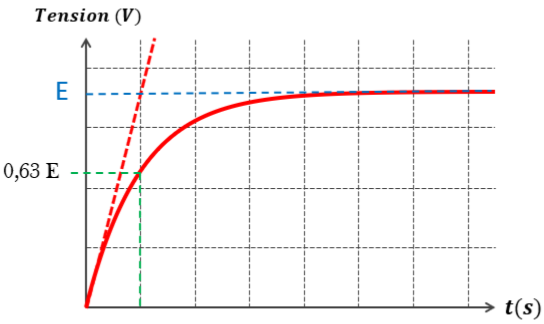
$u_C\,(\tau) = E(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = E(1 - e^{-1})$

$\boxed{u_C\,(\tau) = 0.63\text{ E}}$

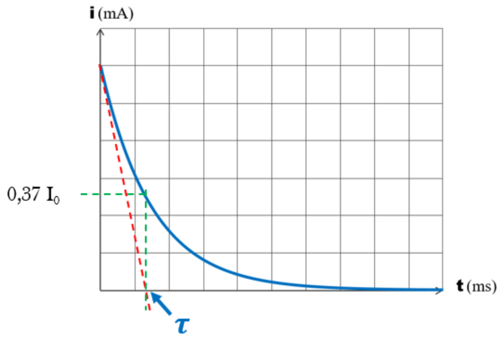
Pour l'intensité :

On a : Pour t = τ

$$i(t) = \frac{E}{R}\ e^{-\frac{\tau}{\tau}} = \boxed{0.37\ \frac{E}{R}}$$



$\tau = RC$



3- **Durée de la charge d'un condensateur :**

Le condensateur se charge complètement pour

u_C (t) = = 99% E

$u_C\ (t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0.99$ E

$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.99$ alors $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.01$

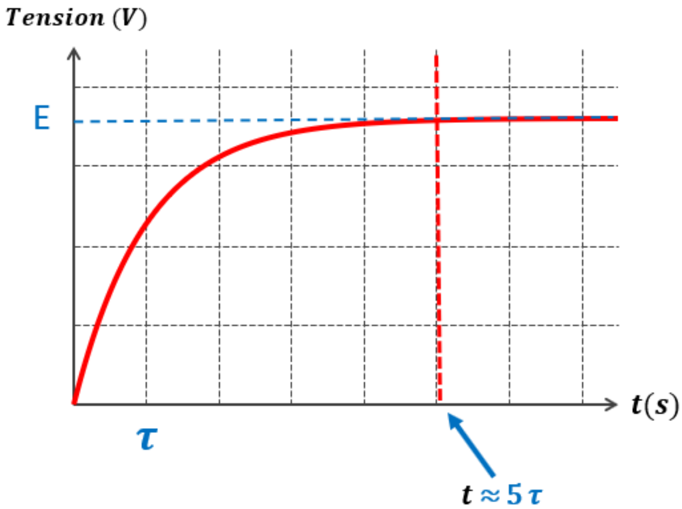
On applique le logarithme :

Ln (e^x) = x

$\mathrm{Ln}(e^{-\frac{t}{\tau}}) = \mathrm{Ln}\ (0.01)$

$-\frac{t}{\tau} = -4.6$

Alors : $\boxed{t \approx 5\,\tau}$



V- Influence de R et C sur la durée de charge :

1- Expériences :

On réalise l'acquisition de la tension u_C aux bornes du condensateur, pour des différentes valeurs de résistance et de capacité tel que :

1ère expérience :

Pour une valeur **C = 6 μF**

On varie la résistance :

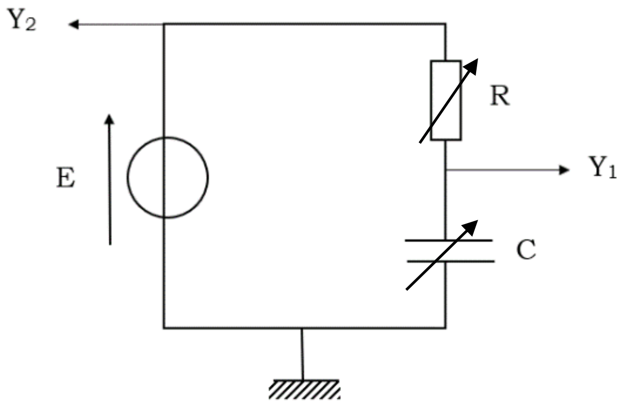
R_1 = 100 Ω
R_2 = 500 Ω
R_3 = 500 Ω

2ème expérience :

Pour une valeur **R = 100 Ω**

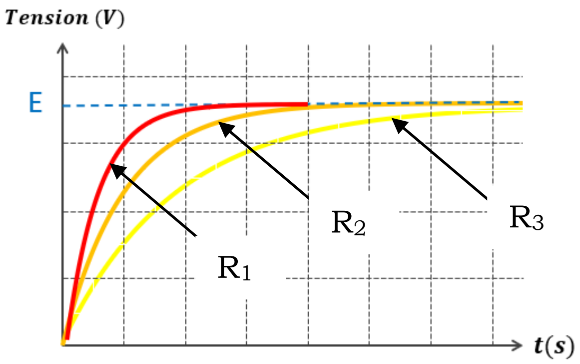
On varie la résistance :

C_1 = 6 μF
C_2 = 10 μF Ω
C_3 = 100 μFΩ

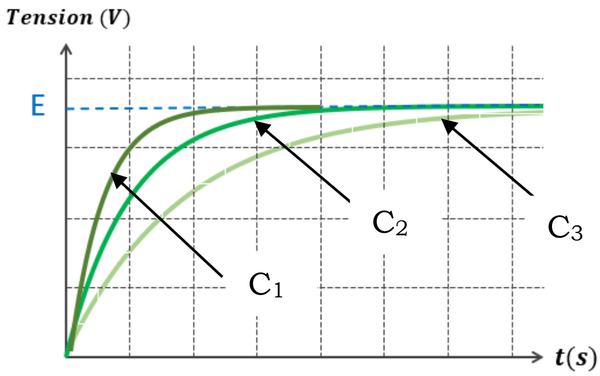


On obtient sur l'écran de l'oscilloscope le chronogramme suivant

1ère expérience :



2ème expérience :



2-Conclusion :

La durée de la charge dépend de la constante du temps τ
Plus le produit RC est important, plus le condensateur se charge lentement, si le produit RC diminue la charge du condensateur sera plus rapide